Tutorato Algebra Lineare – 27/02/25

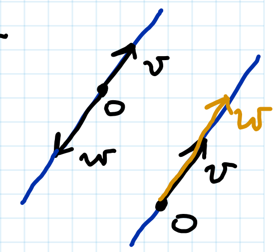
Parte I – Richiami di Teoria

Consideriamo due vettori non nulli v, w in $\mathbb{R}^2$

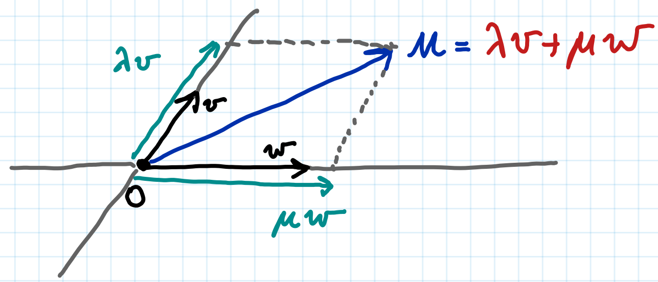
Richiamo: v, w sono lin. DIPENDENTI se uno è multiplo dell'altro

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times$ t.c. $v = \lambda w$

Geometricamente: v, w giacciono sulla stessa retta.



Se v, w sono lin. INDIPENDENTI, allora generano tutto $\mathbb{R}^2$

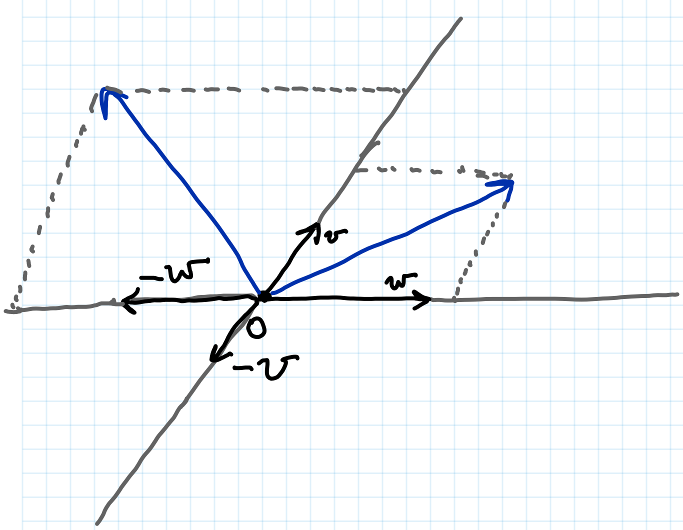


Ogni vettore $u \in \mathbb{R}^2$ si scrive come combinaz. lineare di v e w

$\mathrm{Span}(v) = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme dei multipli di v.

Geometricamente: è la retta (del piano) su cui giace v.

$\mathrm{Span}(v, w) = \{\lambda v + \mu w : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$



Detto in altri termini, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

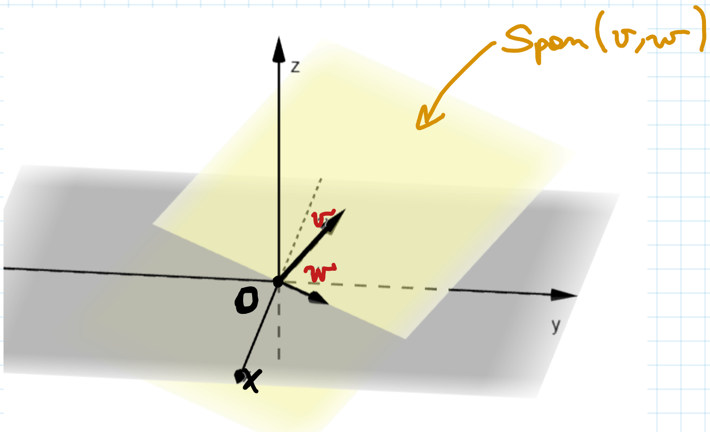
(v, w formano una base di $\mathbb{R}^2$)

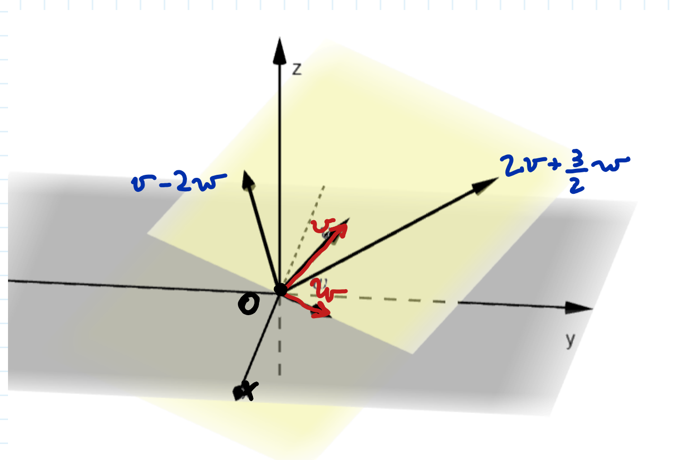
In $\mathbb{R}^3$ consideriamo v, w (non nulli) e lin. INDIP.

Allora v, w generano un PIANO in $\mathbb{R}^3$

$\mathrm{Span}(v, w) = \{\lambda v + \mu w \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Esempio geometrico $\left(v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$





In $\mathrm{Span}(v,w)$ ho in particolare:

→ Tutta la retta su cui giace v $(\mu = 0)$
→ Tutta la retta su cui giace w $(\lambda = 0)$

Domanda: Se $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, perché

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2, w) = \mathrm{Span}(v_1, v_2) \ ?$$

Risposta (algebrica)

Sicuramente $\mathrm{Span}(v_1, v_2) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, v_2, w)$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha v_1 + \beta v_2 + 0 \cdot w$$

Viceversa, scriviamo $w = \alpha v_1 + \beta v_2$ $\left(w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2) \right)$

Sia ora $v \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, w)$. Per definizione:

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $v = a v_1 + b v_2 + c w$

$$= a v_1 + b v_2 + c \alpha v_1 + c \beta v_2$$

$$= (a + c\alpha) v_1 + (b + c\beta) v_2$$

$$\in \text{Span}(v_1, v_2)$$

Risposta (geometrica)

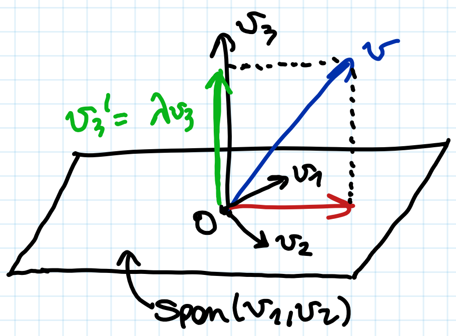
Se sommiamo vettori nel piano $\text{Span}(v_1, v_2)$, restiamo nel piano (regola del PARALLELOGRAMMA sul piano).

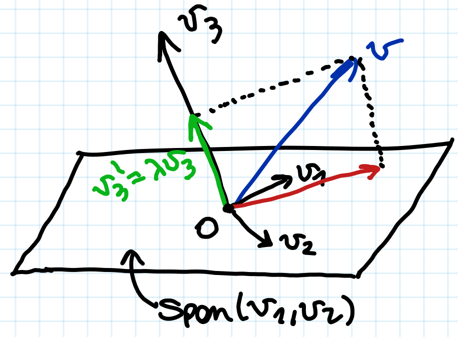
Quindi una combinazione $\underbrace{a v_1 + b v_2}_{\text{nel piano}} + \underbrace{c w}_{\text{nel piano}}$

è nel piano $\text{Span}(v_1, v_2)$.

Geometricamente, per avere v_1, v_2, w lin. INDIP. (in $\mathbb{R}^3$), w deve "uscire" dal piano. I tre vettori così scelti generano tutto $\mathbb{R}^3$ (cioè sono una base, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$)

Esempio





vettore blu $= \underbrace{v_3'}_{\lambda v_3} + \underbrace{\text{vett. rosso}}_{\text{comb. lin di } v_1 \text{ e } v_2}$

PARTE II - ESERCIZI (PRIMO FOGLIO)

Esercizio 1. In ciascuni i casi seguenti, determinare se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e se il vettore v è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3. Nel caso affermativo calcolare le coordinate.

$$a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ricordo che v_1, v_2, v_3 sono lin. DIPENDENTI se esistono $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ NON TUTTI NULLI tali che

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

a)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 4x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_3 \\ -8x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cioè x_1, x_2, x_3 sono soluzioni del sist. lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$$

In particolare, v_1, v_2, v_3 sono

→ LIN. INDIP. se la matrice a scalini ottenuta da $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} = A$ per mezzo di operazioni di Gauss ha 3 PIVOT

→ LIN. DIP. altrimenti

Osserviamo che v è comb. lin. di v_1, v_2, v_3 se e solo se $\exists\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come prima}}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

Quindi conviene direttamente considerare la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \end{array}\right)$$
$$\qquad \underbrace{}_{A} \qquad \underbrace{}_{v}$$

Riducendola a scalini tramite l'algoritmo di Gauss, rispondo contemporaneamente alle due domande (l'indip. lin. di v_1, v_2, v_3 dipende solo da "quello che succede nelle prime 3 colonne").

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{-14} & -6 \end{array}\right)$$

3 PIVOT

v_1, v_2, v_3 sono lin. INDIPENDENTI.

Coordinate di v risp. a v_1, v_2, v_3 : risolvo il sistema ottenuto.

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 + 3x_3 = -8 \\ -14x_3 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \frac{3}{7} \\ x_2 = -8 - 3x_3 = -\frac{65}{7} \\ x_1 = 4 - 2x_2 = \frac{158}{7} \end{cases}$$

$$v = \frac{158}{7} v_1 - \frac{65}{7} v_2 + \frac{3}{7} v_3 .$$

In realtà, potevamo andare oltre (forma RIDOTTA) ...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -14 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{14}R_3]{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -65/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + 6R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 158/7 \\ 0 & 1 & 0 & -65/7 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array}\right) \end{array}.$$

b), c) Esercizio per voi!

[Soluzioni:

b) v_1, v_2, v_3 lin. INDIP.

$v \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

(cioè il sistema $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ non ha soluzione)

c) v_1, v_2, v_3 lin. DIP.

$v \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

(cioè il sistema $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ non ha soluzione)

Per dubbi o problemi, scrivetemi in chat su Teams!]

Esercizio 2. (Problema di compito recente) Per quali valori del parametro a le matrici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti nello spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali?

Soluzione

Siano $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le matrici sono lin. INDIP. $\Longleftrightarrow$ la sola soluzione è $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + a x_3 & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 \quad - 2x_3 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo risolvere queste quattro equazioni

OSS. ("Strategia") Il problema è equivalente a richiedere se

alternativa ma EQUIVALENTE

i vettori

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

siano lin. indip.

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} \\ 2 & \boxed{1} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Ragioniamo sul fatto che la struttura 2×2 non è diversa da quella 4×1 per questo problema (!) Infatti:

- $+$: si sommano le entrate
- $\cdot$: si moltiplicano le entrate

$\leadsto$ Le equazioni da risolvere SONO LE STESSE!

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 - R_1 \\ R_4 - 3R_1}]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 - 4R_2]{R_3 - 3R_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$$

se i vettori 3×1 nella matrice BLU sono lin. indip., a maggior ragione lo sono quelli 4×1 ⊛

Ci sono 3 PIVOT indipendentemente da a

$a+4=0 \Rightarrow 3$ pivot $\Rightarrow$ lin. indip.

$a+4 \neq 0 \Rightarrow$ sottraggo $\frac{a+4}{2} R_3$ a R_4:

$$\xrightarrow{R_4 - \frac{a+4}{2} R_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ancora 3 pivot

$\Rightarrow$ ancora lin. indip.

$$\boxed{\text{Soluzione: per ogni } a \in \mathbb{R}.}$$

⊛ Se $a\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ * \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \\ * \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora anche $a\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. (Problema di compito recente)

(1) Per quali valori del parametro reale a i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\a\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti?

(2) Stessa domanda per i vettori

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\\a\end{pmatrix}.$$

Soluzione

(1) Siamo in $\mathbb{R}^5$. I vettori sono lin. indip. se la riduzione a scalini ha 5 pivot.

Osservando che le prime due righe sono uguali, per sottrazione troviamo una riga di zeri

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1\\ 0&&&&\\ 0&&*&&\\ 0&&&& \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&&&&\\ 0&&*&&\\ 0&&&& \end{pmatrix}$$

NON POTRÒ AVERE 5 PIVOT!

$\boxed{\text{Risposta: per nessun valore di } \alpha \in \mathbb{R}.}$

(2) Come prima:

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&2\\ 0&0&0&1&a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_5-R_4} \begin{pmatrix} \boxed{1}&1&1&1&1\\ 0&\boxed{1}&1&1&1\\ 0&0&\boxed{1}&1&1\\ 0&0&0&\boxed{1}&2\\ 0&0&0&0&\boxed{a-2} \end{pmatrix}$$

Lin. INDIP. $\iff$ ho 5 PIVOT $\iff a-2 \neq 0 \iff a \neq 2$.

Esercizio 4. (Problema di compito recente) Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(1) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti oppure no?
(2) Estrarre una base di $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ dal sistema di vettori v_1, v_2, v_3.

Soluzione

(1) Per esercizio!

[Risposta NO]

(2) Dal punto precedente, so che $\dim(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)) \leq 2$.

non è 3 perché v_1, v_2, v_3 lin DIP.

Ora ho due possibilità:

→ Riduco $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ a scalini ("già fatto" nel punto (1))

e vedo che ho due pivot in corrispondenza delle prime due colonne $\rightsquigarrow$ v_1, v_2 sono lin. indipendenti.

→ Senza usare i pivot, mi rendo conto "a occhio" che v_1, v_2 sono lin. indip.:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ * \\ * \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ * \\ * \end{pmatrix}, \quad v_1 = \lambda v_2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

impossibile!

$\boxed{\text{Risposta: una base di } V \text{ è data da } \{v_1, v_2\}.}$